

Дан болон давхар урвуу дүүжингийн ТЭНЦВЭРЖИЛТ

Б.Луубаатар, А.Батмөнх
ШУТИС-МХТС-ийн ахлах багш, ШУТИС-МХТС-ийн профессор

Хураангуй—Энэхүү өгүүлэлд дан болон давхар урвуу дүүжингийн загварчлал, тэдгээрийн тогтворжуулалтын симуляци, хэрэгжүүлэлтийн талаар өгүүлнэ. Урвуу дүүжинг загварчлах, түүнийг босоо чиглэлд тогтворжуулах, цаашлаад тэргэнцрийн хөдөлгөөнөөр дүүжинг босгох зэрэг нь төвөгтэй асуудлууд бөгөөд өнөөг хүртэл автомат удирдлагын инженерүүдийг сорьсон, сонирхолтой ажил байсаар ирсэн юм. Хүний зогсох болон алхах, пуужингийн нислэгийг загварчлах, олон үетэй байгууламжийн төгсгөлийн цэгийг удирдах зэрэгт суурь болдог нь энэхүү ажлын ач холбогдлыг харуулж байгаа юм. Сонгодог механикийн хөдөлгөөний хуулиуд болон Лагранжийн механикт тулгуурлан дан, давхар урвуу дүүжингийн төлөвийн орны загварыг гаргасан ба Matlab програм дээр загварын туршилт, туйл байршуулах аргын туршилт, LQR удирдлагын туршилтуудыг хийж үзсэн. Matlab-ийн Simmechanics tool-ийг ашиглан виртуал механик орчинд 3D загвар үүсгэн, симуляци хийсэн. Дан дүүжингийн хувьд тэргэнцэр дээр бэхлэгдсэн саваа болон хоёр дугуйт робот хэлбэрээр бодит хэрэгжүүлэлтийг хийсэн. Цаашид давхар урвуу дүүжингийн бодит загварыг хийж тогтворжуулах, дан болон давхар дүүжингүүдийн аль алины хувьд дүүжинг босгох үйлдлийг гүйцэтгэх, хоёр дугуйт роботыг траекторын дагуу явдаг болгох зэргээр өргөжүүлэх болно.

Түлхүүр үгс—Урвуу дүүжингийн загвар, давхар урвуу дүүжингийн загвар, давхар урвуу дүүжингийн тэнцвэржилт, туйл байршуулах арга, LQR удирдлага

I. УДИРТГАЛ

Хэвтээ тэнхлэгийн дагуу хөдлөх тэргэнцэрт хөдөлгүүргүй эргэх гол дээр бэхлэгдсэн дүүжинг механик системийг судлахад өргөн ашигладаг. Тэргэнцэрт хэвтээ тэнхлэгийн дагуу үйлчлэх хүчний тусламжтайгаар дүүжингийн хүндийн төвийг эргэх голоос дээш байрлалтай босоо тэнхлэгийн дагуу тэнцвэржүүлэх нь удирдлагын системийн хүндэтэр даалгаваруудын нэг юм. Дүүжин болон тэргэнцрийг дээрх даалгаврыг гүйцэтгэх чадвартай удирдлагын хамт урвуу дүүжингийн систем гэж нэрлэнэ. Уг систем

нь шугаман бус тогтворгүй системийн сонгодог загвар юм. Тиймээс түүнийг тогтворжуулах ажил нь судлаачдын сонирхлын төвд байсаар ирсэн бөгөөд тэргэнцрийн хөдөлгөөнийг хэвтээ тэнхлэгийн дагуу, босоо тэнхлэгийн дагуу, босоо тэнхлэгийг тогтмол радиустай тойрох хөдөлгөөнтэй зэрэг янз бүрийн тохиолдолд судлаж үзсэн байна [1]-[3].

Цаашлаад хоёр болон түүнээс дээш тооны угсарсан урвуу дүүжингүүдийг босоо тэнхлэгийн дагуу тэнцвэржүүлэх ажлууд ч судлагдсан байна [5][7]. Бидний хувьд энэ удаад дан болон давхар дүүжинтэй системд төвлөрч тэдгээрийг тогворжуулахыг зорьсон. Энэхүү системийн удирдлагын хэсгийг PID, туйл байршуулах, LQR зэрэг үндсэн аргуудыг ашиглан хэрэгжүүлэх ажлууд хийгдсэн **Error! Reference source not found.**[9]. Төлөвийн орны загварт тулгуурласан туйл байршуулах болон оптимал удирдлагын арга нь бүх төлөвийн хувьсагчийн утгыг удирдлагад ашигладаг тул параметрийн өөрчлөлтөд харьцангуй тэсвэртэй юм. Туйл байршуулах арга нь хугацааны орон дах системийн шилжилтийн процессын характеристикүүдэд тулгуурлан хоёрдугаар эрэмбийн системээр ойролцоолчилж болох давамгайлсан туйлуудыг тодорхойлж, түүнтэй нийцэх гэдрэг холбооны өсгөлтийн коэффициентүүдийг олох замаар шийдвэрлэгддэг [10]. Оптимал удирдлагын LQR арга нь оролтын болон төлөвийн хувьсагчийн утгуудыг үнэлгээний функцэд ашиглаж, үнэлгээний функцийг утга хамгийн бага байх нөхцлийг хангах төлөвийн гэдрэг холбооны коэффициентүүдийг тодорхойлдог [11]. Эдгээр аргууд нь хамгийн өргөн хэрэглэгддэг аналитик удирдлагын аргууд юм [11-15].

Хэдийгээр симуляци хийх үед туйл байршуулах арга нь шилжилтийн процессийн дурын хэлбэрийг хэрэгжүүлэх боломжтойг харуулах ч бодит гүйцэтгэлийн үед тэжээлийн хүчдэлийн хязгаарлалт зэргээс хамаарч эгшин зуурын шилжилт хийх боломжгүй юм. Энэ нь ч симуляцийн үр дүнгээр батлагдаж дүүжинг тогтворгүй төлөвт оруулж байгаа нь харгадсан.

II. МАТЕМАТИК ЗАГВАР

Урвуу дүүжингийн загварыг Ньютоны II хууль болон Лагранжийн механикт тулгуурлан гаргаж болох бөгөөд аль ч тохиолдолд ижил үр дүнд хүрнэ.

A. Дан урвуу дүүжингийн математик загвар

Дан урвуу дүүжингийн төлөвийн орны загварыг Ньютоны хөдөлгөөний хуулиудыг ашиглан гаргаж

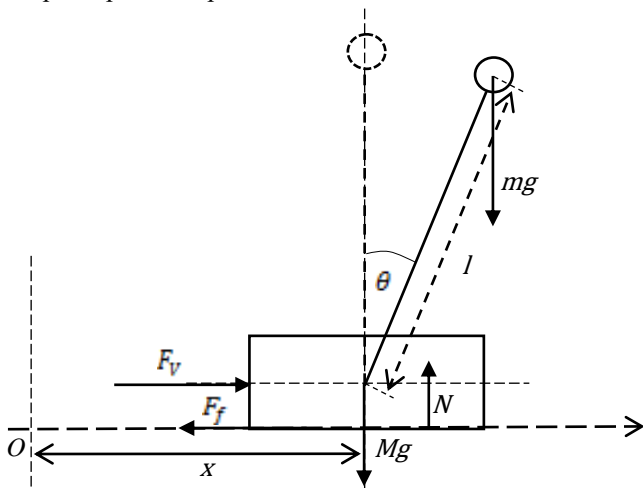
*Энэхүү судалгааны ажил нь Монгол Улсын Боловсрол Соёл Шинжлэх Ухааны Яамны “Дээд боловсролыг шинэчлэл” хөтөлбөрийн хүрээнд Азийн Хөгжлийн Банкны санхүүжилтээр гүйцэтгэгдсэн “Тогтворгүй системийн тэнцвэржилтийн судалгаа” төслийн “Босоо дүүжингийн тэнцвэржилт” хэсгийн үр дүн болно.

А.Батмөнх нь Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургуулийн Мэдээлэл Холбооны сургуулийн Электроникийн салбарт профессор (Утас: 7515 5333, e-mail: luubaatar@must.edu.mn).

Б.Луубаатар нь Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургуулийн Мэдээлэл Холбооны сургуулийн Электроникийн салбарт ахлах багш (e-mail: luubaatar@must.edu.mn).

авсан. Суурь тэргэнцрийн дээр байрлах байгууламжийн хэлбэр болон бүтцээс шалтгаалж инерцийн моментийн хөдөлгөөнд нөлөөлөх хэмжээ ялгаатай байна. Бидний тохиолдолд дүүжин массын хувьд жигд хуваарьлагдсан тэгш хэмтэй тул инерцийн моментийн нөлөөг бага гэж үзсэн. Урвуу дүүжингийн загварыг

Зураг 1-д үзүүлэв. Энэ нь хэвтээ тэнхлэгийн дагуу шугаман хөдлөх M масстай тэргэнцэр, түүнд эргэх холбоосоор бэхлэгдсэн m масстай, l урттай саваа буюу дүүжингээс тогтоно. Дүүжингийн эргэх хөдөлгөөний зам нь нэг хавтайд орших тул системийн хөдөлгөөний чөлөөний зэрэг нь хоёр болно. Гэхдээ төлөвийн хувьсагчаар тэргэнцрийн шилжилт, хурд, өнцөг, өнцөг хурд гэсэн хувьсагчууд сонгогдсон тул систем нь дөрвөн нэгдүгээр эрэмбийн дифференциал тэгшитгэлийн системээр илэрхийлэгдэнэ. Эргэх холбоос дээр мотор зэрэг удирдах байгууламж байхгүй тул анхны байрлалаас үүсэх хөдөлгөөн болон тэргэнцрийн хэвтээ тэнхлэгийн дагуу хөдлөх хөдөлгөөнүүд л дүүжингийн байрлалыг тодорхойлно. Урвуу дүүжингийн автомат удирдлагын систем нь дүүжинг босоо тэнхлэгтэй тэг градус үүсгэхээр тогтворжуулах, мөн тэргэнцрийн байрлалыг анхны байрлалд байлгах үндсэн даалгавартай. Тиймээс системийн хөдөлгөөнийг илтгэх үндсэн параметр нь дүүжингийн босоо тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг θ болон тэргэнцрийн байрлал x болно.



Зураг 1. Дан урвуу дүүжингийн загвар.

Урвуу дүүжингийн хөдөлгөөний тэгшитгэлийг гаргавал:

$$\begin{cases} (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} = F_v + ml \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m l \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ (I + ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl \sin \theta - ml \cos \theta \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases} \quad (1)$$

болно. Үүнд: F_v нь тэргэнцэрт гаднаас үйлчлэх хүч, I нь дүүжингийн инерцийн момент, l нь дүүжингийн урт, γ_f нь үрэлтийн коэффициент, θ дүүжингийн босоо тэнхлэгтэй үүсгэж буй өнцөг, x тэргэнцрийн байрлал, M болон m нь харгалзан тэргэнцрийн болон дүүжингийн хүндийн төвийн масс юм.

Дүүжингийн босоо тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг маш бага $\theta \approx 0$ мөн инерцийн моментийг бага $I \approx 0$ гэж үзвэл хөдөлгөөний тэгшитгэлийн системийг дараах байдлаар шугаманчлана.

$$\begin{cases} (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + m l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} = F_v \\ l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = g\theta \end{cases} \quad (2)$$

Тэгшитгэл (2)-ийг ахин эрэмбэлвэл систем тэгшитгэл нь төлөвийн орны стандарт хэлбэрт шилжинэ.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{M} \theta - \frac{\gamma_f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{F_v}{M} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{\gamma_f}{Ml} \frac{dx}{dt} - \frac{F_v}{Ml} \end{cases} \quad (3)$$

Функцийн хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал нь нэгдүгээр эрэмбийн уламжлалаас авсан уламжлал гэдгийг тооцвол дээрх систем тэгшитгэлийг нэгдүгээр эрэмбийн тэгшитгэлүүдийн системд дараах байдлаар задалж болно.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \frac{M+m}{Ml} g & \frac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma_f}{M} \\ -\frac{\gamma_f}{Ml} \end{bmatrix} F_v \quad (4)$$

Дээрх тэгшитгэл нь урвуу дүүжингийн төлөвийн орноор илэрхийлэгдсэн загвар бөгөөд үүнийг дараах байдлаар хураангуйлж болно.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{u} \quad (5)$$

Үүнд:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix}, & \vec{u} &= F_v, & A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \frac{M+m}{Ml} g & \frac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma_f}{M} \\ -\frac{\gamma_f}{Ml} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

болно.

В. Давхар урвуу дүүжингийн математик загвар

Сонгодог механикийн хуулиудад тулгуурлан урвуу давхар дүүжингийн загварыг гаргах нь харьцангуй төвөгтэй. Иймд Лагранжийн механик ашигласан. Уг системийн хувьд хөдөлгөөний чөлөөний зэрэг гурав хэдий ч гаралтыг тэргэнцрийн байрлал, саваа тус бүрийн босоо тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгөөр авбал эдгээр байрлал болон өнцгүүдийн шугаман бус хамаарлаас болж төлөвийн хувьсагчдын тоо зургаа болно. Иймээс системийн хөдөлгөөний динамик тэгшитгэл нь зургаадугаар эрэмбийн систем тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэнэ.

Юуны өмнө хөдлөх хэсэг тус бүрийн хувьд кинетик болон потенциал энергийн тэгшитгэлийг бичнэ. Тэргэнцэр, давхар дүүжингийн доод талын саваа, мөн

дээд талын саваа тус бүрт кинетик энергийн тэгшитгэлийг бичиж, хураангуйлвал харгалзан:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 ((x + l_1 \sin \theta_1)')^2 + \frac{1}{2} m_1 ((l_1 \cos \theta_1)')^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{m_2}{2} \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + m_2 \dot{\theta}_2 \theta_1 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2$$

болно. Ерөнхий кинетик энерги нь:

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

Хөдлөх хэсэг бүрийн потенциал энерги нь харгалзан дараах байдлаар бичигдэнэ:

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

$$V_2 = m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

Ерөнхий потенциал энерги нь:

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

Эндээс Лагранжийг олвол:

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_0 + m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 L_1^2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2 \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos \theta_1 - m_2 l_2 \cos \theta_2$$

Цаашлаад Лагранжийн тэгшитгэлийг бичвэл:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

(14)-г (15)-г орлуулан хялбарчилж, зарим коэффициентүүдийг $a_0 = (m_0 + m_1 + m_2)$, $a_1 = m_1 l_1 + m_2 L_1$, $a_2 = m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 L_1^2$, $a_3 = m_2 l_2$, $a_4 = m_2 l_2 L_1$, $a_5 = m_2 l_2^2 + J_2$ гэж орлуулвал (16) гарна.

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \dot{\theta}_1 + a_3 \dot{\theta}_2 = F_x$$

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{\theta}_1 + a_4 \dot{\theta}_2 = a_1 g \theta_1$$

$$a_3 \ddot{x} + a_4 \dot{\theta}_1 + a_5 \dot{\theta}_2 = a_3 g \theta_2$$

Энд F_x нь тэргэнцэрт үйлчилж байгаа хүч бөгөөд, давхар урвуу дүүжинг тэнцвэржсэн үед саваануудын босоо тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг нь 0 байна гэж үзээд $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0$, $\dot{\theta}_1 \approx \dot{\theta}_2 \approx 0$, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$,

$\sin(\theta_1 - \theta_2) \approx \theta_1 - \theta_2$, $\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$ байхаар шугаманчилсан болно.

(16) систем тэгшитгэлээс:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 g & 0 \\ 0 & 0 & a_3 g \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

гэвэл (16) нь дараах хэлбэртэй болно.

$$\mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{M} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 F_x$$

\mathbf{x} векторын уламжлалыг тэнцүүгийг тэмдгийн зүүн талд ялгавал

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B}_2 F_x$$

болох бөгөөд улмаар төлөвийн орны вектор хувьсагчийг $\mathbf{x} = [x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$ гэж сонговол төлөвийн орны тэгшитгэл $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$ дараах хэлбэртэй болно.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} F_x$$

Улмаар гаралтыг $\mathbf{y} = [x, \theta_1, \theta_2]^T$ гэж үзвэл гаралтын $\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$ тэгшитгэлийн хувьд \mathbf{C} матриц нь

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

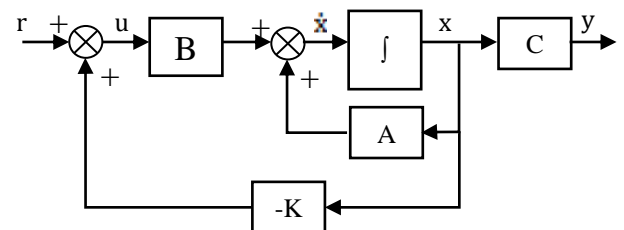
болно.

III. УДИРДЛАГЫН СИСТЕМ

А. Туйл байршуулах аргаар системийг тогтворжуулах

Урвуу дүүжингийн удирлагын системийг туйл байршуулах арга болон LQR аргуудыг ашиглан хэрэгжүүлсэн. Туйл байршуулах аргын үед системийн урьдчилан тодорхойлсон шилжилтэд харгалзах туйлуудын утагд тулгуурлан төлвийн гэдрэг холбооны өсгөлтийн коэффициентыг тодорхойлно. Төлөвийн гэдрэг холбооны удирдлагатай системийн ерөнхий хэлбэрийг

Зураг -т үзүүлэв.



Зураг 2. Төлвийн гэдрэг холбоотой системийн блок диаграм.

Алхамт оролттой үеийн системийн гаралтын шилжилтийн процессыг илэрхийлэх гол параметрууд нь %OS-хэтрэлтийн хувь, T_r -оргилд хүрэх хугацаа, мөн T_s -тогтворжих хугацаа юм. Бид өөрийн системийг хоёрдугаар эрэмбийн системээр ойролцоолчилж болно гэж үзээд системийг гүйцэтгүүлэх шилжилтийн

процессын параметруудаас давамгайлах хос туйлыг олно. Урвуу дүүжингийн загвар нь дөрөвдүгээр эрэмбийн систем тул үлдсэн хоёр туйлыг системийн голлох туйлуудад бага нөлөөлөхөөр бодож сөрөг бодит тоон тэхлэг дээр зүүн тийш хол байрлуулна. Хоёрдугаар эрэмбийн системийн хувьд хугацааны орон дах параметрууд $\%OS, Ts$ болон s орон дах $p_{1,2}$ -туйлуудын хамаарал дараах томъёогоор илэрхийлэгдэнэ.

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma_d \pm \omega_d, & \sigma_d &= \frac{4}{T_s} \\ \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Үүнд σ_d нь экспоненциал давтамж, ω_n нь системийн натурал давтамжийг тодорхойлно. ζ - унтралтын эрчим болон ω_n -натурал давтамжийг дараах байдлаар олно.

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad \omega_n = \frac{|\sigma_d|}{\zeta} \quad (22)$$

Төлвийн гэдэрэг холбоотой үед төлвийн орон дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (23)$$

Туйл байршуулах аргын үед хүссэн туйлуудаасаа гаргаж авсан характеристик тэгшитгэл гэдэрэг холбооны өсгөлтийн коэффициент агуулсан характеристик тэгшитгэлүүдийг тэнцүүлэх замаар гэдэрэг холбооны өсгөлтийн коэффициентийг олно.

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] &= (s + p_1)(s + p_2) \\ &\dots (s + p_n) \end{aligned} \quad (24)$$

Эндээс гэдэрэг холбооны өсгөлтийг илэрхийлэх $\mathbf{K}=[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$ коэффициентүүдийг олсноор туйл байршуулах аргаар системийг тогтворжуулна.

B. LQR аргаар системийг тогтворжуулах

LQR аргаар системийг тогтворжуулах үеийн төлвийн гэдэрэг холбоотой систем нь зураг 2-т үзүүлсэнтэй ижил бөгөөд гэдэрэг холбооны коэффициент \mathbf{K} -г

$$J^* = \min_u \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (25)$$

үнэлгээний функцийн утга хамгийн бага байх үеийнхээр сонгож авна. \mathbf{Q} болон \mathbf{R} нь төлвийн болон оролтын векторын үнэлгээний функц дэх жинг тодорхойлох тэгш хэмт, эерэг матрицууд байна. \mathbf{K} коэффициент нь дараах томъёогоор олдоно.

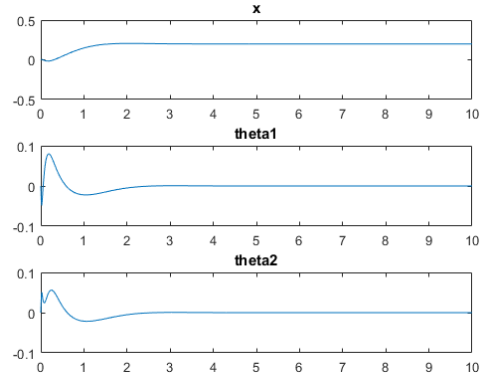
$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (26)$$

Үүний \mathbf{P} нь алгебрын Riccati тэгшитгэлийн (12) хариу болно.

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (27)$$

IV. СИМУЛЯЦИЙН ҮР ДҮН

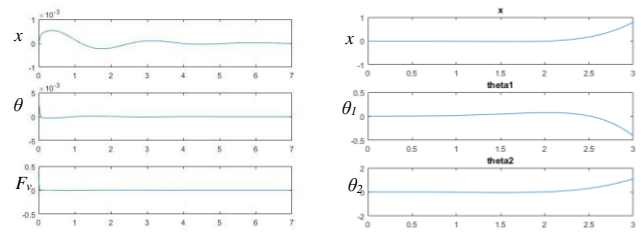
Симуляцийг хоёр шатлалаар хийж үзсэн болно. Эхний тохиолдолд .m файл үүсгэн туйл байршуулах арга болон LQR аргуудыг ашиглан туршсан. Мөн Matlab-ийн Simmechanics tool-ийг ашиглан гурван хэмжээст виртуал механик орчны симуляци хийсэн болно.



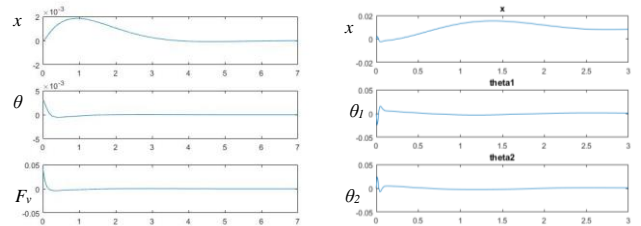
Зураг 3. Давхар дүүжингийн симуляци

Юуны өмнө дүүжингийн математик загварыг симуляци хийж шалгах шаардлагатай.

Зураг -т давхар дүүжин дээр хийсэн симуляцийн үр дүнг харуулав. Өнцгийн анхны байрлалыг $\theta=0.003$ рад байхаар тохируулан симуляци хийхэд өнцгийн болон байршлын утга эрс нэмэгдэж байгаа нь бодит системийн шинж чанарыг давтаж байгааг харуулж байна.



a) b)



c) d)

Зураг 4. Дан болон давхар урвуу дүүжингийн тогтворжилтийн симуляци.

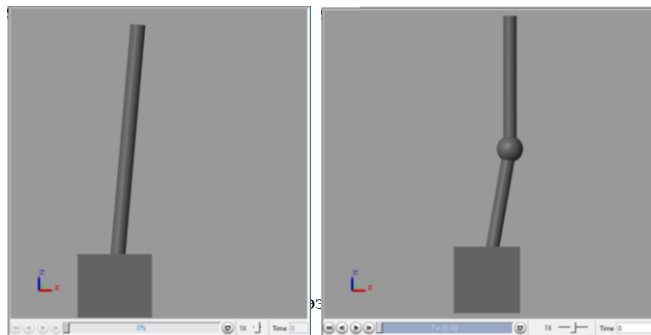
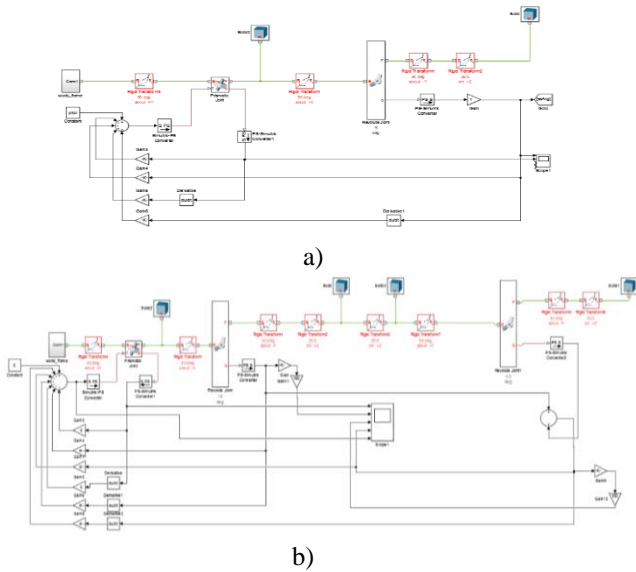
Системийг тогтворжуулахын тулд төлвийн гэдэрэг холбооны болон LQR аргуудыг ашигласан. Зураг -т a, b-д харгалзан туйл байршуулах арга хэрэглэсэн үеийн дан болон давхар дүүжингийн симуляци, c, d-д LQ арга хэрэглэсэн дан болон давхар дүүжингийн симуляцийг харуулав. Симуляцийн үед дан дүүжингийн өгөгдлийг дараах байдлаар өгсөн.

- $m = 0.365$ гр;
- $M = 0.365$ гр;
- $g = 9.8$ м/с²;
- $\gamma f = 0.01$ гр;
- $l = 0.105$ м;

Анхны байрлалыг $\theta = 0.003$, $x = 0$ байхаар сонгож хэд хэдэн туйлын утганд симуляци хийхэд тогтворжсон үр дүн үзүүлж байсан. Харин LQ аргын үед \mathbf{Q} , \mathbf{R}

матрицуудын ялгаатай утгын сонголтонд ялгаатай шилжилтийн процессыг харуулж байсан.

Симуляцийн явцад олдсон гэдрэг холбооны коэффициентийн утгуудаа Matlab-ийн Simmechanics tool-ийг ашиглан виртуал механик орчинд туршсан. Туршилтаар зарим туйлын сонголт болон **Q**, **R** матрицын утгуудад тогтворжсон үр дүн үзүүлж байна. Simmechanics дээрх туршилтын орчинг Зураг 4-д харуулав. Зургийн а-д дан дүүжин, б-д давхар дүүжингийн загварыг, с-д тэдгээрийн гурван хэмжээст виртуал механик орчны дүрслэлүүдийг тус тус харуулав. Matlab .m код дээр тогтворжиж байсан нөхцлүүдийн зарим нь Simmechanics дээр хийгдсэн симуляцийн үед тогтворгүй болж байна. Энэ нь цаашид системийн өөрийн үндсэн параметрууд болон тогтворжуулах удирдлагын системийн параметруудээр тодорхойлогдох тогтворжилтын зурвасыг тогтоох шаардлагатайг харуулж байна. Мөн Simmechanics орчинд хийсэн симуляцийн үр дүн харьцангуй бодит физик орчинтой ойролцоо үр дүн үзүүлж байгаа нь хэрэгжүүлэлтийн үед гарах зардал болон эрсдлийг эрс бууруулах боломжийг олгож байна.



Зураг 5. SIMMECHANICS ДЭЭР ХИЙСЭН СИМУЛЯЦИЙН ОРЧИН

V. ДАН ДҮҮЖИНГИЙН БОДИТ ЗАГВАРЫН ХЭРЭГЖҮҮЛЭЛТ

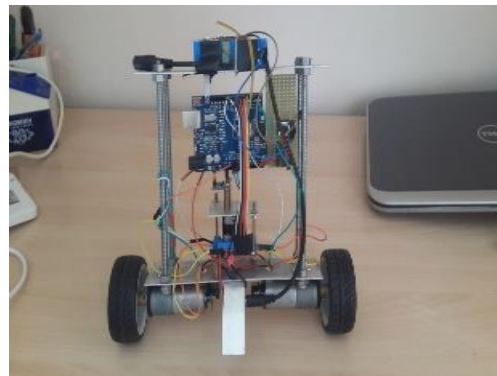
Дан дүүжингийн бодит загварыг тэргэнцэр, дүүжингийн хослол болон хос дугуйт робот хэлбэрээр

хэрэгжүүлж, тогтворжуулах ажлыг гүйцэтгэсэн. Дан урвуу дүүжинг туйл байршуулах болон болон LQR удирдлагын аргаар тогтворжуулсан нь амжилттай болсон.



Зураг 6. Дан дүүжингийн бодит хэрэгжүүлэлт

Зураг-д дан урвуу дүүжингийн бодит хэрэгжүүлэлтийг харуулав. Бодит загвар нь ArduinoUno удирдлагатай, тогтмол гүйдлийн моторыг импульсийн өргөний модуляцаар удирддаг. Дүүжингийн хазайлтын өнцгийг потенциометрийн хүчдэлийн түвшинг ArduinoUno-ийн 10 битийн аналог тоон хөрвүүлэгчээр тоон болгох замаар авч байгаа тул квантлах алхам нь $0,35^\circ$ болж байгаа нь системийн тогтворжилтонд сөргөөр нөлөөлж байна. Дан урвуу дүүжинг хос дугуйт робот хэлбэрээр хэрэгжүүлснийг Зураг 76-д харуулав.



Зураг 76. Хос дугуйт роботын хэрэгжүүлэлт

Хос дугуйт роботын хэрэгжүүлэлтийн хувьд гуго мэдрэгч ашиглан хазайлтын өнцгийг нарийвчлал өндөртэй авч байгаа нь квантлалын алдаанаас болж үүсэх нөлөөллийг багасгаж байна. Харин тэргэнцрийг хөдөлгөх хүч нь дугуйн хаймар болон суурь хавтгайн хоорондын үрэлтээр тодорхойлогдох тул өндөр хүчээр үйлчлэх боломжийг хязгаарлаж байгаа нь харагдаж байсан.

ДҮГНЭЛТ

Энэхүү ажлын гол зорилго нь тэнцвэргүй системийн сонгодог төлөөлөгчид болох дан болон давхар урвуу дүүжингийн тэнцвэржилтийг хангах удирдлагын системийг зохион байгуулах юм. Эхний шатны ажил нь дүүжингийн математик загварыг гаргаж түүнийг ашиглан тохирох удирдлагын аргачлал болон удирдлагын параметрыг сонгох юм. Урвуу дүүжингийн загварт үл ялиг хазайлттай байх анхны

байрлалын утгыг оноож симуляци хийх үед дүүжин тогтворгүй төлөвт орж уналт үүсэж байгааг симуляцийн үр дүн харуулж байгаа нь загвар бодит байдалтай дүйж байгааг харуулж байна. Симуляцийн орчинд туйл байрлуулах болон LQR аргуудыг хэрэглэх үед загвар тогтворжсон үр дүнг үзүүлэв. Цаашлаад Matlab-ийн Simmechanics tool ашиглан виртуал механик орчинд симуляци хийсэн бөгөөд дан дүүжингийн үед туйл байршуулах, LQR аргууд, давхар дүүжингийн хувьд LQR арга ашиглан тогтворжсон үр дүн үзүүлж чадсан. Дүүжингийн параметруудээс хамаарч туйл байршуулах аргын туйлуудын утга, LQR аргын Q, R матрицуудын тохирсон хэмжээг тогтоох алгоритм нь энэ ажлын бас нэгэн өргөтгөл болох юм.

Бид дараагийн шатанд давхар урвуу дүүжингийн бодит загварыг хийж тогтворжуулан, дан болон давхар дүүжинг босгох алгоритмыг боловсруулж хэрэгжүүлнэ.

АШИГЛАСАН МАТЕРИАЛ

- [1] Acheson, D. J. "Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum." *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 448. No. 1932. The Royal Society, 1995.
- [2] Akhtaruzzaman, Md, and Amir Akramin Shafie. "Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis." *Mechatronics and Automation (ICMA)*, 2010 International Conference on. IEEE, 2010.
- [3] Li, Jingtao, et al. "Mechanical design and dynamic modeling of a two-wheeled inverted pendulum mobile robot." *2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics*. IEEE, 2007.
- [4] Kajita, Shuuji, et al. "Biped walking pattern generation by a simple three-dimensional inverted pendulum model." *Advanced Robotics* 17.2 (2003): 131-147.
- [5] Б.Луубаатар, А.Батмөнх. "Урвуу дүүжингийн тэнцвэржүүлэлт". ШУТИС, ЭШБ №2016-12.
- [6] Zhong, Wei, and Helmut Rock. "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart." *Control Applications, 2001.(CCA'01)*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on. IEEE, 2001.
- [7] Rubi, J., A. Rubio, and A. Avello. "Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum." *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* 149.2 (2002): 169-175.
- [8] Prasad, Lal Bahadur, Barjeev Tyagi, and Hari Om Gupta. "Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: performance analysis without and with disturbance input." *International Journal of Automation and Computing* 11.6 (2014): 661-670.
- [9] Prasad, Lal Bahadur, Barjeev Tyagi, and Hari Om Gupta. "Modelling and simulation for optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system using PID controller and LQR." *2012 Sixth Asia Modelling Symposium*. IEEE, 2012.
- [10] Nise, Norman S. "Control system engineering, John Wiley & Sons." Inc, New York (2011).
- [11] Kirk, Donald E. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- [12] Ц.Тэнгис, А.Батмөнх, "Стерео дүрс боловсруулалт дээр суурилсан тэнцвэржилтийн системийн судалгаа" ШУТИС, ЭШБ №2015-12
- [13] Ц.Тэнгис, А.Батмөнх, "Тэнцвэргүй дүүжингийн PID болон төлөвийн орны удирдлага" ММТ 2016 ЭШХ эмхэтгэл хуудас 125.
- [14] Б.Дагвасүрэн, А.Батмөнх. Тогтворгүй системийн тэнцвэржилт. Дөрвөн сэнст. ММТ2015. х 163-167
- [15] Tengis Tserendondog, Byambajav Ragchaa, Luubaatar Badarch, Batmunkh Amar "State Feedback Control of Unbalanced Seesaw" The 11th International Forum on Strategic Technology 2016