Дифференциал роботын траектор засах алгоритм

Б.Үйлстөгөлдөр, М.Баярпүрэв

Электроник, Холбооны Инженерчлэлийн Тэнхим
Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль, МУИС
Улаанбаатар хот, Монгол Улс
Цахим шуудан: uilseemgl@gmail.com

***Хураангуй*—Роботын траекторыг засахад робот өөрийн байршлыг мэдэж байхаас гадна, тухайн агшинд хаана байх ёстойгоо мэдэж байх шаардлагатай. Ингэснээр өөрийн байршлыг, төлөвлөгөөт байршилтай харьцуулан траекторыг засах эсэх шийдвэрийг гаргах юм. Энэ өгүүлэлд дифференциал роботын траекторыг төлөвлөхдөө куб бизье муруй ашигласан ба ротари энкодероос мэдээлэл орж ирэх агшинд роботын бодит байршил болон төлөвлөгөөт бизье муруй дээрх байршлыг тодорхойлох, тэдгээрийг харьцуулан шийдвэр гаргах болон шаардлагатай тохиолдолд траекторыг шинээр төлөвлөх алгоритмыг санал болгоно.**

I. Удиртгал

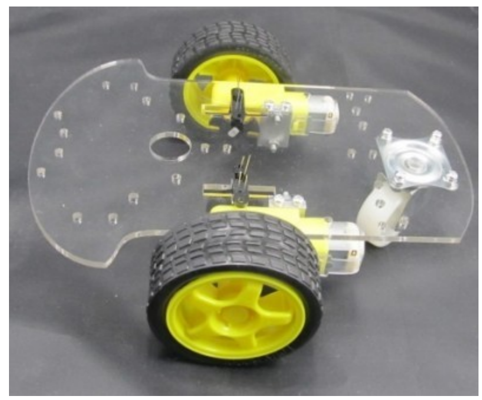
Энэ өгүүллийг дараах байдлаар зохион байгуулсан болно: II дэд бүлэгт дифференциал роботын тодорхойлолт болон бүтэц, шинж чанаруудын тухай тайлбарласан. III дэд бүлэгт дифференциал роботын кинематик болон ротари энкодероос хугацааны мэдээллийг ашиглан хурдыг сэргээх талаар, IV дэд бүлэгт бизье муруйгаар роботын траекторыг төлөвлөх, A, B дугуйнуудын траектор, болон A дугуйны энкодероос дохио ирэх бүр дээрх роботын төлөвлөгөөт байршлыг хэрхэн олох тухай тайлбарласан бөгөөд V дэд бүлэгт траектор засах алгоритмыг танилцуулав. VI бүлэгт туршилтын үр дүнг харуулав.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛ РОБОТ

Дифференциал робот нь хоёр талд байрласан дугуйгаар залуурдагдах хөдөлгөөнт робот юм. Уг хоёр дугуй нь моторт холбогдсон ба эргэлтийн хурд болон чиглэл нь бие биенээс хамааралгүйгээр эргэх боломжтой байна. Эдгээр дугуйн эргэлтийн хурд болон чиглэлийг удирдсанаар роботын хөдөлгөөний чиглэл хурдыг удирдах боломжтой юм. Иймд эдгээр хоёр дугуйг удирдлагын хоёр дугуй гэе.

Удирдлагын хоёр дугуй нь нэг тэнхлэг дээр байрлах ба уг тэнхлэгийг гол тэнхлэг гэе. Удирлагын дугуйнуудын хөдөлгөөний чиглэл гол тэнхлэгтэй перпендикуляр байна.

Робот нь удирдлагын хоёр дугуйнаас гадна хэдэн ч дугуйтай байж болох ба тэдгээр дугуй нь хөдөлгөөнд нөлөө үзүүлэхгүй зөвхөн роботын тэнцвэрийг хангах үүрэгтэй байна.



Зураг 1. Удирдлагын хоёр дугуй болон нэг тэнцвэрийн дугуйтай дифференциал роботын их бие

Хэрэв роботын удирдлагын хоёр дугуй ижил чиглэлд ижил хурдтай эргэвэл робот урагшаа эсвэл хойшоо давших хөдөлгөөн хийнэ. Хэрэв хоёр дугуйн эргэлтийн чиглэл ижил боловч хурд нь ялгаатай бол робот бага эргэлтийн хурдтай дугуйн тал руу эргэх хөдөлгөөн хийнэ.

Удирдлагын хоёр дугуйн эргэлтийн чиглэл ялгаатай бол робот дороо эргэх хэлбэрийн хөдөлгөөн хийнэ.

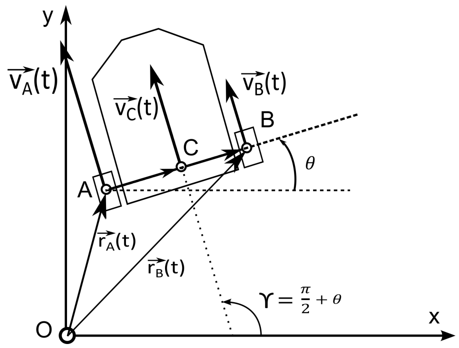
Роботын хөдөлгөөн зөвхөн хоёр дугуйн хурд болон эргэлтийн чиглэлээс хамаарах тул тооцоо хийхэд харьцангуй хялбар юм.

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛ РОБОТЫН БАЙРШЛЫГ ТОДОРХОЙЛОХ

A. *Дифференциал роботын кинематик*

Роботын удирдлагын хоёр дугуйг A, B, гол тэнхлэгийн төв цэгийг C гэе. Мөн гол тэнхлэгийн уртыг L, гол тэнхлэгийн абсцисс тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг θ гэх ба цагийн зүүний эсрэг чиглэлийг эерэгээр авья.

A дугуйн хурдны вектор нь абсцисс тэнхлэгийн нэгж векторыг цагийн зүүний эсрэг $90+\theta$ өнцгөөр эргүүлэн v_A дахин сунгасантай адил юм.



Зураг 2. Дифференциал робот координатын системд

$$\vec{V_A} = v_A \begin{pmatrix} \cos(90+\theta) & -\sin(90+\theta) \\ \sin(90+\theta) & \cos(90+\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_A \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Үүнтэй адилаар B дугуйн хурдны вектор, болон C цэгийн хурдны вектор

$$\vec{V_B} = v_B \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{V_C} = v_C \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

болно.

Хугацааны ямар нэг t агшинд A, B дугуйн хурдууд харгалзан v_A, v_B байсан гэе. Тэгвэл роботын эргэх өнцөг хурд нь

$$\epsilon = \frac{v_B - v_A}{L} \tag{4}$$

болно. Мөн C цэгийн хурд

$$v_C = \frac{v_A + v_B}{2} \tag{5}$$

болно.

dt хугацаанд робот

$$d\theta = \epsilon dt = \frac{v_B - v_A}{L} dt \tag{6}$$

өнцгөөр эргэх ба C цэгийн шилжилт

$$\overrightarrow{dS_C} = \vec{V_C} dt = v_C \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} dt \tag{7}$$

болно. Эндээс C цэгийн x болон y тэнхлэгийн дагуух шилжилтүүд нь

$$dx_C = -v_C \sin\theta dt$$
$$dy_C = v_C \cos\theta dt$$

болно. A болон B дугуйн шилжилтүүд нь

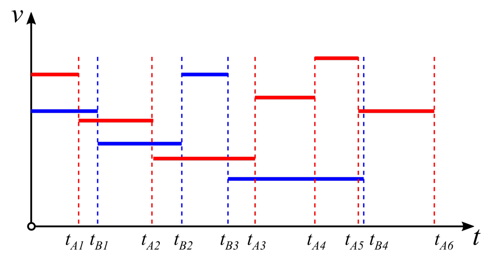
$$dx_A = -v_A \sin\theta dt \qquad dy_A = v_A \cos\theta dt \tag{8}$$

$$dx_B = -v_B \sin\theta dt \qquad dy_B = v_B \cos\theta dt \tag{9}$$

болно.

B. Байршлыг бодит хугацаанд тодорхойлох

Дифференциал роботын дугуйнууд дээр ротари энкодер байрлана. Тэдгээрээс ирэх хугацааны мэдээллээс дугуйнуудын хурдыг сэргээн роботын байршлыг бодит хугацаанд тодорхойлно. Ротари энкодер тодорхой хэмжээний тогтмол зам туулах бүрт дохио өгөх ба тухайн хугацааны завсарт дугуй тогтмол хурдтай явсан гэж үзэн хурдыг сэргээнэ.



Зураг 3. A дугуйг улаан, B дугуйг цэнхэрээр тэмдэглэв

Дифференциал роботын A, B дугуйнуудын хурд хугацааны графикийг Зураг 3-т үзүүллээ.

Роботын анхны байрлал, сэргээсэн хурд, болон роботын кинематикийг ашиглан ротари энкодероос дохио ирэх бүрт байршлыг бодит хугацаанд тодорхойлно.

IV. ТРАЕКТОРЫГ БИЗЬЕ МУРУЙГААР ТӨЛӨВЛӨХ

Бизье муруй нь орчин үеийн компьютерийн график дүрслэлд гөлгөр тасралтгүй муруйг загварчлахад өргөн ашиглагддаг параметрт муруй юм. Квадрат болон куб бизье муруйнууд хамгийн өргөн ашиглагддаг. Дээд эрэмбийн бизье муруйнууд нь тооцоолол илүү шаарддаг тул комплекс дүрсийг доод эрэмбийн бизье муруйнуудын нийлэмжээр илэрхийлдэг. Бидний хувьд роботын траекторыг илэрхийлэхдээ куб бизье муруйнуудыг ашиглана. Куб бизье муруй $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ хяналтын 4 цэгээр

$$C_{3,3}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3 \tag{10}$$

байгуулагдана. Энд t нь бизье параметр бөгөөд $t \in [0,1]$ байна.

Дифференциал роботын траекторыг төлөвлөхдөө гол тэнхлэгийн төв цэгийн траекторыг (10) хэлбэрийн бизье муруйн нийлэмжээр төлөвлөнө.

(10) илэрхийллийг задлаад эмхэтгэвэл

$$\vec{r}_C(t) = \mathbf{A}t^3 + \mathbf{B}t^2 + \mathbf{C}t + \mathbf{D}, \tag{11}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_3 - 3\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0,$$
$$\mathbf{B} = 3\mathbf{P}_2 - 6\mathbf{P}_1 + 3\mathbf{P}_0,$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{P}_1 - 3\mathbf{P}_0,$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_0$$

болно. Бизье параметрээр уламжлал аван бизье хурд гэе. Тэгвэл C цэгийн бизье хурдны тэгшитгэл

$$\vec{v}_C(t) \quad = \quad 3\mathbf{A}t^2 + 2\mathbf{B}t + \mathbf{C} \tag{12}$$

болно.

C цэгийн траектор болон бизье хурднаас A ба B дугуйнуудын траектор болон Бизье хурдуудыг тооцоолбол

$$\vec{r}_A = \vec{r}_C - \frac{L}{2\,|\,\vec{v}_C\,|}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_C \tag{13}$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_C + \frac{L}{2\,|\,\vec{v}_C\,|}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_C \tag{14}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_b \\ \omega_b & 0 \end{pmatrix}\overrightarrow{AC} \tag{15}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_b \\ \omega_b & 0 \end{pmatrix}\overrightarrow{CB} \tag{16}$$

болно. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ векторуудийг 90 градус эргүүлсэнээр $\vec{v}_C$ хурдны вектортой параллел вектор үүсэх тул A, B дугуйнуудын Бизье хурдны модуль

$$v_A(t) = v_C(t) - \frac{\omega_b L}{2} \tag{17}$$

$$v_B(t) = v_C(t) + \frac{\omega_b L}{2} \tag{18}$$

болно. Энд байрлал болон хурдуудыг тодорхой тооцоолоход тухайн агшин дахь $\overrightarrow{CB}$ векторын абсцисс тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг ба Бизье өнцөг хурд буюу ω_b шаардлагатай болж байна. $\theta_b = \gamma_b - \dfrac{\pi}{2}$ ба $\gamma_b = \arctan\dfrac{v_{Cy}}{v_{Cx}}$ тул

$$\theta_b = \arctan\left(\frac{3A_y t^2 + 2B_y t + C_y}{3A_x t^2 + 2B_x t + C_x}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

$$\omega_b = \theta_b(t)' \tag{20}$$

болно.

À дугуйн туулсан зам нь бизье параметр болон A дугуйн бизье хурдаар

$$S = \int_0^t v_A dt \tag{21}$$

гэж тодорхойлогдоно. Тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талаас дифференциал авбал

$$dS = v_A dt \qquad \Rightarrow \tag{22}$$

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{v_A} \tag{23}$$

болно. (23) тэгшитгэлд (17) тэгшитгэлийг орлуулвал

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{v_C(t) - \frac{\omega_b L}{2}} \tag{24}$$

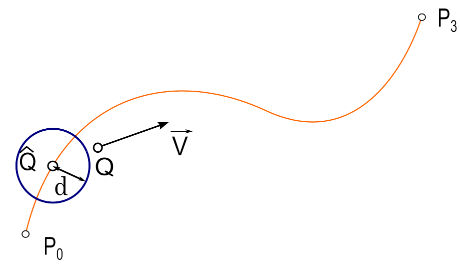
болно. (24) дифференциал тэгшитгэлийн шийдүүдийг олсноор A дугуйн энкодероос дохио ирэх бүр дээрх бизье параметрийг тодорхойлно. Ингэснээр (11) тэгшитгэлээр тухайн агшин дахь роботын төлөвлөгөөт байршлыг тодорхойлох боломжтой болно.

V. ТРАЕКТОР ЗАСАХ АЛГОРИТМ

A. Шинэ траектор байгуулах шаардлагатай эсэхийг шалгах

Траектор дахин байгуулах шаардлагатай эсэх шийдвэрийг тогтмол too d-г ашиглан гаргана. Ингэхдээ роботын бодит байршил болон төлөвлөгдсөн байршил хоёрын хоорондох зай d-гээс их байвал шинээр траектор байгуулна.

Роботын бодит байршил Q цэг ба роботын байхаар төлөвлөгдсөн байршлыг $\hat{Q}$, харгалзах бизье хугацааг t_Q гэе.



Зураг 4. Траектороос гарсан тохиолдол. Q нь багц даалгаварыг гүйцэтгэсний дараа ирсэн цэг, $\hat{Q}$ нь очихоор төлөвлөгдсөн цэг, d нь шийдвэр гаргах тогтмол, $\overrightarrow{V}$ нь хурдны вектор

Тэгвэл $\hat{Q}$ цэгийн байрлал

$$r_{\hat{Q}} = \mathbf{A}t_{\hat{Q}}^3 + \mathbf{B}t_{\hat{Q}}^2 + \mathbf{C}t_{\hat{Q}} + \mathbf{D} \tag{25}$$

байна. Эндээс бид Q болон $\hat{Q}$ цэгүүдийн хоорондох зайг олж болно.

$$d_{Q\hat{Q}} = \sqrt{(Q_x - \hat{Q}_x)^2 + (Q_y - \hat{Q}_y)^2} \tag{26}$$

B. Шинэ траектор байгуулах

Шинэ траектор байгуулахдаа эхлээд муруйн Q цэгээс уг муруйн төгсгөлийн P_3 цэг хүртэл өмнөх муруйтай давхцах бизье муруйн хяналтын $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ цэгүүдийг олъё. Уг олох муруйнхаа параметрүүдийг $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ гэвэл муруйн тэгшитгэл

$$\overrightarrow{r_1(t_1)} = \hat{\mathbf{A}}t_1^3 + \hat{\mathbf{B}}t_1^2 + \hat{\mathbf{C}}t_1 + \hat{\mathbf{D}} \tag{27}$$

болно. Анхны муруйн Бизье параметрийг t гэе. Тэгвэл шинэ муруйн Бизье параметр анхны Бизье муруйн параметрээс шугаман

$$t_1 = mt + n \tag{28}$$

хамааралтай байх нь илэрхий ба $t_1 = 0$, $t_1 = 1$ үед

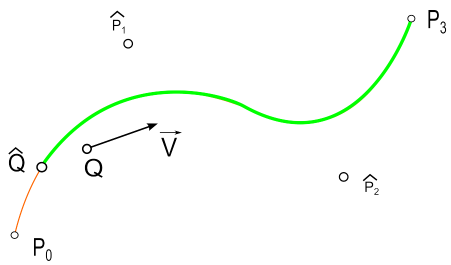
$$\begin{cases} 0 = mt_{\hat{Q}} + n \\ 1 = m + n \end{cases} \tag{29}$$

систем тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэлээс m, n коэффициентүүдийг олвол

$$t_1 = \frac{t - t_{\hat{Q}}}{1 - \hat{Q}} \quad \Rightarrow \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad t = (1 - t_{\hat{Q}})t_1 + t_{\hat{Q}} \tag{31}$$

болно.



Зураг 5. Давхцсан муруй байгуулах. Q нь багц даалгаварыг гүйцэтгэсний дараа ирсэн цэг, $\hat{Q}$ нь очихоор төлөвлөгдсөн цэг, шинээр байгуулагдсан муруй $\hat{Q}$, $\hat{\mathbf{P}}_1$, $\hat{\mathbf{P}}_2$, $\mathbf{P}_3$ цэгүүдээр илэрхийлэгдэнэ.

$$\hat{\mathbf{A}}t_1^3+\hat{\mathbf{B}}t_1^2+\hat{\mathbf{C}}t_1+\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{A}t^3+\mathbf{B}t^2+\mathbf{C}t+\mathbf{D} \quad ,t_1\in[0,1] \tag{32}$$

(31) тэгшитгэлийг (32) тэгшитгэлд орлуулан тодорхой бус коэффициентийн аргаар шинэ муруйн параметрүүд болох $\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{D}}$ - ийг олвол

$$\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{A}(1-t_{\hat{Q}})^3 \tag{33}$$

$$\hat{\mathbf{B}}=(3\mathbf{A}t_{\hat{Q}}+\mathbf{B})(1-t_{\hat{Q}})^2 \tag{34}$$

$$\hat{\mathbf{C}}=(3\mathbf{A}t_{\hat{Q}}^2+2\mathbf{B}t_{\hat{Q}}+\mathbf{C})(1-t_{\hat{Q}}) \tag{35}$$

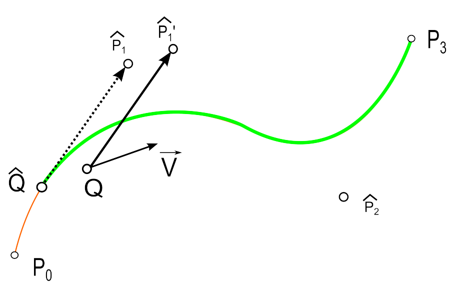
$$\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{A}t_{\hat{Q}}^3+\mathbf{B}t_{\hat{Q}}^2+\mathbf{C}t_{\hat{Q}}+\mathbf{D} \tag{36}$$

болно. $\hat{\mathbf{P}}_1,\hat{\mathbf{P}}_2$ цэгүүдийг олвол

$$\hat{\mathbf{P}}_1=\frac{\hat{\mathbf{C}}}{3}+\hat{\mathbf{D}} \tag{37}$$

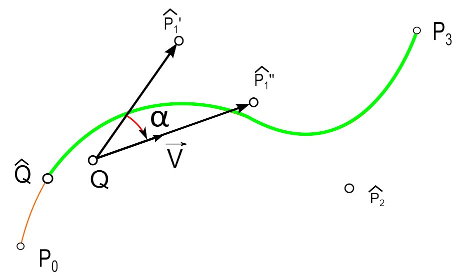
$$\hat{\mathbf{P}}_2=\frac{\hat{\mathbf{B}}}{3}+\frac{2\hat{\mathbf{C}}}{3}+2\hat{\mathbf{D}}-\hat{\mathbf{Q}} \tag{38}$$

болно. Үүний дараагаар $\overrightarrow{\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{P}}_1}$ векторын эхлэлийг Q цэг рүү параллелаар зөөхөд векторын төгсгөл очих цэгийг $\hat{\mathbf{P}}_1{}'$ гэе.



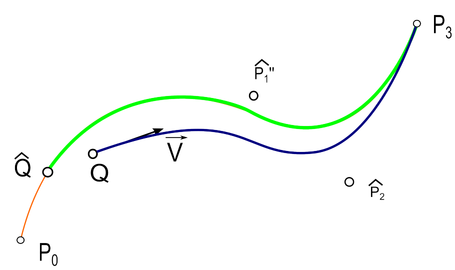
Зураг 6. Траектор засах алгоритм. Q нь багц даалгаварыг гүйцэтгэсний дараа ирсэн цэг, $\hat{Q}$ нь очихоор төлөвлөгдсөн цэг, шинээр байгуулагдсан муруй $\hat{Q}$, $\hat{\mathbf{P}}_1$, $\hat{\mathbf{P}}_2$, $\mathbf{P}_3$ цэгүүдээр илэрхийлэгдэнэ.

Роботын хойд тэнхлэгийн төв цэгийн хурдыг огцом өөрчлөхгүй байхын тулд шинээр байгуулагдах муруйн эхлэлийн шүргэгч шулуун нь уг хурдны векторын дагуу байх ёстой. Иймд $\overrightarrow{\mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}}_1{}'}$ векторийн чиглэлийг роботын одоогийн хурдны векторийн чиглэлтэй давхцуулж эргүүлнэ.



Зураг 7. Траектор засах алгоритм. Q нь багц даалгаварыг гүйцэтгэсний дараа ирсэн цэг, $\hat{Q}$ нь очихоор төлөвлөгдсөн цэг, шинээр байгуулагдсан муруй $\hat{Q}$, $\hat{\mathbf{P}}_1$, $\hat{\mathbf{P}}_2$, $\mathbf{P}_3$ цэгүүдээр илэрхийлэгдэнэ.

Дээрх алхмуудын үр дүнд үүсэх $Q,\hat{\mathbf{P}}_1'',\hat{\mathbf{P}}_2,\mathbf{P}_3$ цэгүүдээр илэрхийлэгдэх куб эрэмбийн Бизье муруй нь манай шинэ траектор болно.

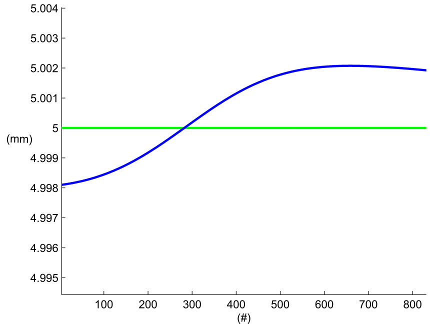


Зураг 8. Траектор засах алгоритм. Цэнхэрээр зурагдсан муруй нь шинэ траектор болно.

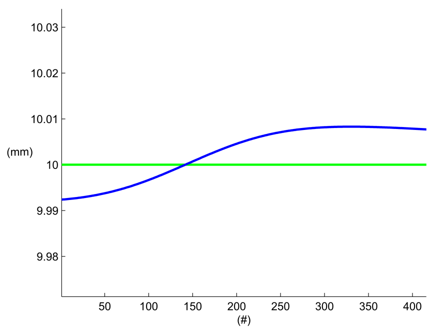
VI. ТУРШИЛТ, ҮР ДҮН, ДҮГНЭЛТ

Роботын төлөвлөгдсөн байршлыг олоход нэгдүгээр эрэмбийн дифференциал тэгшитгэлийн шийдийг энкодерийн алхам бүр дээр тооцоолох шаардлагатай болсон. (24) дифференциал тэгшитгэлийн шийдүүдийг Рунге-Куттагийн болон Эйлерийн алгоритмуудыг ашиглан MATLAB програм дээр тооцоолж үр дүнг харьцуулсан. Ингэхдээ бизье муруйн хяналтын цэгүүдийг өөрчлөөгүй, энкодерийн алхамын хэмжээг өөр байх тохиолдлуудад тооцоог хийсэн. Тэгшитгэлийн шийдүүд буюу бизье параметрүүдийн хоорондох бизье муруйнуудын уртыг тооцоолж харьцуулсан байдлыг дараах зургуудад харуулав (Зураг 9, 10, 11).

Траектор дахин төлөвлөх алгоритмийг MATLAB програм дээр туршин симуляц хийсэн. Жишээ үр дүнг Зураг 12, Зураг 13 зургуудад харуулав.



Зураг 9. Рунге-Кутта болон Эйлерийн алгоритмуудын харьцуулалт. Энкодерийн алхам 5 мм үед. Ногооноор Рунге-Куттагийн алгоритмын үр дүнг, цэнхэрээр эйлерийн алгоритмын үр дүнг харуулав



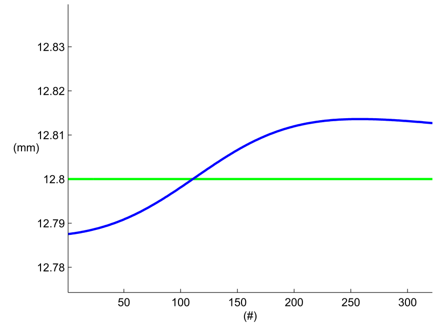
Зураг 10. Рунге-Кутта болон Эйлерийн алгоритмуудын харьцуулалт. Энкодерийн алхам 10 мм үед. Ногооноор Рунге-Куттагийн алгоритмын үр дүнг, цэнхэрээр эйлерийн алгоритмын үр дүнг харуулав

Ном зүй

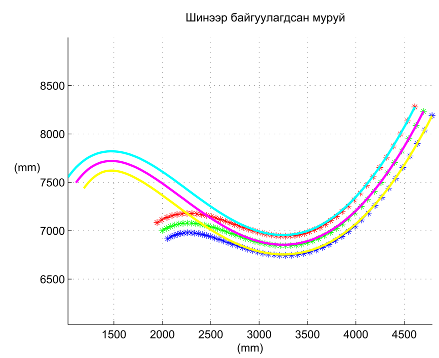
[1] Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics".

[2] Gregory Dudek, Michael Jenkin , "Computational Principles of Mobile Robotics".

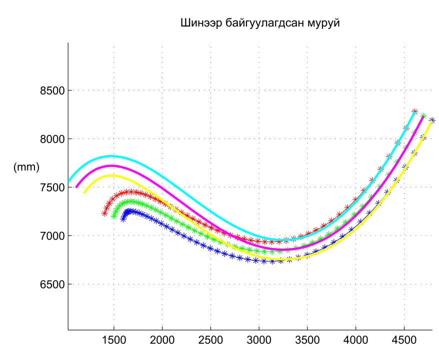
[3] Б.Ганбат, "Залуурдагддаггүй тэнхлэг бүхий роботын координатыг хугацааны мэдээлэл ашиглаж олох алгоритм".



Зураг 11. Рунге-Кутта болон Эйлерийн алгоритмуудын харьцуулалт. Энкодерийн алхам 12.8 мм үед. Ногооноор Рунге-Куттагийн алгоритмын үр дүнг, цэнхэрээр эйлерийн алгоритмын үр дүнг харуулав



Зураг 12. Траектор шинээр байгуулалт. Одоор шинээр зурсан траекторыг, шулуунаар төлөвлөгөөт траекторыг тэмдэглэв.



Зураг 13. Траектор шинээр байгуулалт. Одоор шинээр зурсан траекторыг, шулуунаар төлөвлөгөөт траекторыг тэмдэглэв.